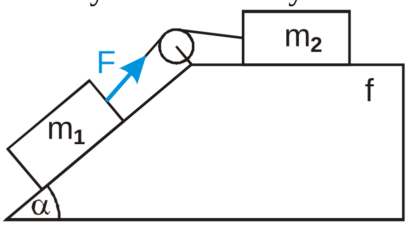
1.2.16 Nakloněná rovina III

Předpoklady: 1214

Pedagogická poznámka: Následující příklady opět patří do kategorie „vozíčků“. Je samozřejmě otázkou, zda tyto příklady v takovém množství cvičit. Osobně se mi líbí, že se studenti procvičují v řešení příkladů „od rozboru sil“ a v postupném řešení. Největším problémem pro studenty je rozdělení příkladů na postupné kroky:
obrázek se silami
výraz pro F
doplnění vztahů pro jednotlivé síly
výpočet zrychlení
výpočet síly
V některých učebnicích bývá způsob, který používám při řešení, odmítán jako nesprávný, protože nemůžeme počítat zrychlení všech vozíčků, když každý z nich zrychluje v jiném směru. Osobně považuji tento přístup za přehnaně puristický. Následující příklady se příliš neliší od situace, kdy ze stolu začne padat provázek. Každá jeho část zrychluje v jiném směru, přesto s ním počítáme jako s jedním tělesem.

Př. 1: Urči zrychlení soustavy na obrázku. Urči velikost vyznačené síly F . Tření uvažuj.

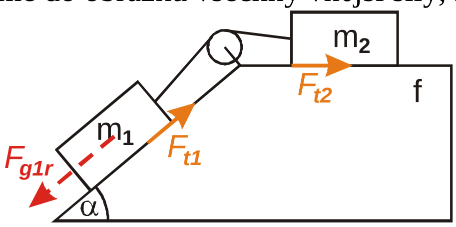


$m_1 = 2\,\text{kg}$, $m_2 = 1\,\text{kg}$, $\alpha = 40°$, $f = 0{,}3$.

Výpočet zrychlení:

Druhý Newtonův zákon: $a = \frac{F}{m}$

Nakreslíme do obrázku všechny vnější síly, které působí na libovolné závaží ve směru jeho



pohybu.

Výsledná síla: $F = F_{g1r} - F_{t1} - F_{t2}$

Spočteme jednotlivé síly:

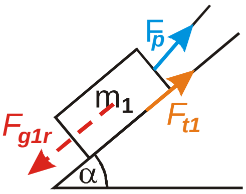
- $F_{g1r} = F_{g1} \sin\alpha = m_1 g \sin\alpha$
- $F_{t1} = N_1 f = F_{g1k} f = F_{g1} \cos\alpha \cdot f = m_1 g \cos\alpha \cdot f$
- $F_{t2} = N_2 f = F_{g2} f = m_2 g f$

Dosadíme do vzorce: $a=\frac{F}{m}=\frac{F_{g1r}-F_{t1}-F_{t2}}{m_1+m_2}=\frac{m_1 g\sin\alpha-m_1 g\cos\alpha\cdot f-m_2 gf}{m_1+m_2}$.

Spočteme hodnotu zrychlení: $a=\frac{2\cdot 10\sin 40°-2\cdot 10\cos 40\cdot 0,3-1\cdot 10\cdot 0,3}{2+1}\,\mathrm{m/s^2}=1,75\,\mathrm{m/s^2}$

Výpočet síly *F*:

Nakreslíme si všechny síly působící ve směru pohybu na závaží m_1.



Závaží zrychluje směrem dolů: $F_v=F_{g1r}-F_p-F_{t1}$.

Vyjádříme F_p: $F_p=F_{g1r}-F_{t1}-F_v=m_1 g\sin\alpha-m_1 g\cos\alpha\cdot f-am_1$

Dosazení: $F_p=m_1 g\sin\alpha-m_1 g\cos\alpha\cdot f-am_1=$
$=2\cdot 10\sin 40°-2\cdot 10\cdot\cos 40°\cdot 0,3-2\cdot 1,75\,\mathrm{N}=4,76\,\mathrm{N}$

Závaží se budou pohybovat se zrychlením $1,75\,\mathrm{m/s^2}$, provázek bude na první závaží působit silou $4,76\,\mathrm{N}$.

Pedagogická poznámka: Následující výpočty studentům pouze ukazuji. Samostatně je nechám počítat pouze ty největší nadšence.

Pro velikost síly, kterou působí provázek na závaží m_1 můžeme odvodit obecný vzorec:

$$F_p=F_{g1r}-F_{t1}-am_1=m_1 g\sin\alpha-m_1 g\cos\alpha\cdot f-\frac{m_1 g\sin\alpha-m_1 g\cos\alpha\cdot f-m_2 gf}{m_1+m_2}m_1=$$

$$=\frac{(m_1 g\sin\alpha-m_1 g\cos\alpha\cdot f)(m_1+m_2)-m_1^2 g\sin\alpha+m_1^2 g\cos\alpha\cdot f+m_1 m_2 gf}{m_1+m_2}=$$

$$=\frac{m_1^2 g\sin\alpha-m_1^2 g\cos\alpha\cdot f+m_1 m_2 g\sin\alpha-m_1 m_2 g\cos\alpha\cdot f-m_1^2 g\sin\alpha+m_1^2 g\cos\alpha\cdot f+m_1 m_2 gf}{m_1+m_2}=$$

$$=\frac{m_1 m_2 g\sin\alpha-m_1 m_2 g\cos\alpha\cdot f+m_1 m_2 gf}{m_1+m_2}$$

Dosazení zjistíme přesnou hodnotu síly:

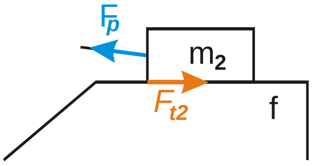
$$F_p=\frac{m_1 m_2 g\sin\alpha-m_1 m_2 g\cos\alpha\cdot f+m_1 m_2 gf}{m_1+m_2}=$$

$$=\frac{2\cdot 1\cdot 10\sin 40°-2\cdot 1\cdot 10\cos 40°\cdot 0,3+2\cdot 1\cdot 10\cdot 0,3}{2+1}\,\mathrm{N}=4,75\,\mathrm{N}$$

Získali jsme přesnější hodnotu než při řešení příkladu (nedosazovali jsme zaokrouhlené zrychlení).

Podobně spočteme sílu, kterou působí provázek na závaží m_2.

Nakreslíme si všechny síly působící ve směru pohybu na závaží m_2.



Dosadíme do 2. Newtonova zákona pro závaží m_2: $a=\frac{F}{m}=\frac{F_p-F_{t2}}{m_2}$

Vyjádříme F_p: $am_2=F_p-F_{t2}$.

$F_p = am_2 + F_{t2} = am_2 + m_2 gf$

Spočteme hodnotu: $F_p = am_2 + F_{t2} = am_2 + m_2 gf = 1,75 \cdot 1 + 1 \cdot 10 \cdot 0,3\,\text{N} = 4,75\,\text{N}$.

Obecným dosazením bychom dostali stejný výraz jako při dosazování před chvilkou:

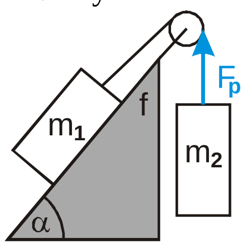
$$F_p = am_2 + F_{t2} = \frac{m_1 g \sin\alpha - m_1 g \cos\alpha \cdot f - m_2 gf}{m_1 + m_2} m_2 + m_2 gf =$$

$$= \frac{m_1 m_2 g \sin\alpha - m_1 m_2 g \cos\alpha \cdot f - m_2^2 gf + m_2 gf\left(m_1 + m_2\right)}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{m_1 m_2 g \sin\alpha - m_1 m_2 g \cos\alpha \cdot f - m_2^2 gf + m_2 m_1 gf + m_2^2 gf}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{m_1 m_2 g \sin\alpha - m_1 m_2 g \cos\alpha \cdot f + m_2 m_1 gf}{m_1 + m_2}$$

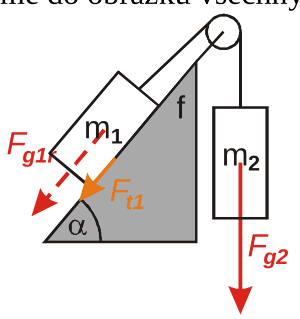
Př. 2: Urči zrychlení soustavy na obrázku. Urči velikost vyznačené síly F. Tření uvažuj.



$m_1 = 1\,\text{kg}$, $m_2 = 2\,\text{kg}$, $\alpha = 50°$, $f = 0,6$.

Výpočet zrychlení:

Nakreslíme do obrázku všechny vnější síly, které působí na libovolné závaží ve směru jeho



pohybu.

Výsledná síla: $F = F_{g2} - F_{t1} - F_{g1r}$

Spočteme jednotlivé síly:

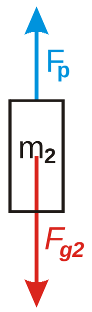
- $F_{g2} = m_2 g$
- $F_{t1} = N_1 f = F_{g1k} f = F_{g1} \cos\alpha \cdot f = m_1 g \cos\alpha \cdot f$
- $F_{g1r} = F_{g1} \sin\alpha = m_1 g \sin\alpha$

Dosadíme do vzorce: $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{F_{g2} - F_{t1} - F_{g1r}}{m_1 + m_2} = \dfrac{mg_2 - m_1 g \sin\alpha - m_1 g \cos\alpha \cdot f}{m_1 + m_2}$.

Spočteme hodnotu zrychlení: $a = \dfrac{2 \cdot 10 - 1 \cdot 10 \sin 50° - 1 \cdot 10 \cos 50° \cdot 0,6}{1+2}\,\text{m/s}^2 = 2,83\,\text{m/s}^2$

Výpočet síly *F*:

Nakreslíme si všechny síly působící ve směru pohybu na závaží m_2.



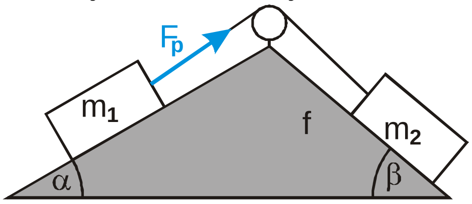
Závaží zrychluje směrem dolů: $F_v = F_{g2} - F_p$

Vyjádříme F_p: $F_p = F_{g2} - F_v = m_2 g - a m_2$

Spočteme hodnotu: $F_p = m_2 g - a m_2 = 2 \cdot 10 - 2 \cdot 2{,}83\,\mathrm{N} = 14{,}34\,\mathrm{N}$

Závaží se budou pohybovat se zrychlením $2{,}83\,\mathrm{m/s^2}$, provázek bude na první závaží působit silou $14{,}34\,\mathrm{N}$.

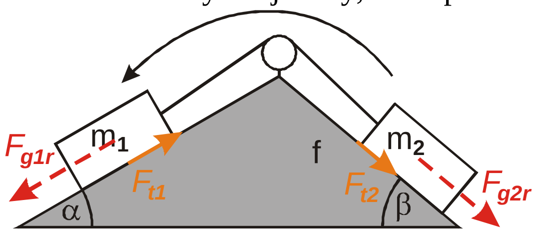
Př. 3: Urči zrychlení soustavy na obrázku. Urči velikost vyznačené síly F. Tření uvažuj.



$m_1 = 3\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$, $\alpha = 30°$, $\beta = 40°$, $f = 0{,}4$.

Výpočet zrychlení:

Není zcela jasné, na kterou stranu se soustava bude pohybovat. Zvolíme směr a nakreslíme do obrázku všechny vnější síly, které působí na libovolné závaží ve směru jeho pohybu:



Výsledná síla: $F = F_{g1r} - F_{g2r} - F_{t1} - F_{t2}$

Spočteme jednotlivé síly:

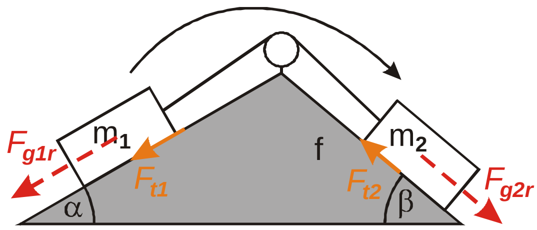
- $F_{g1r} = m_1 g \sin\alpha$
- $F_{g2r} = m_2 g \sin\beta$
- $F_{t1} = N_1 f = F_{g1k} f = F_{g1} \cos\alpha \cdot f = m_1 g \cos\alpha \cdot f$
- $F_{t2} = N_2 f = F_{g2k} f = F_{g2} \cos\beta \cdot f = m_2 g \cos\beta \cdot f$

Dosadíme do vzorce:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_{g1r} - F_{g2r} - F_{t1} - F_{t2}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 g \sin\alpha - m_2 g \sin\beta - m_1 g \cos\alpha \cdot f - m_2 g \cos\beta \cdot f}{m_1 + m_2}.$$

Spočteme hodnotu zrychlení:

$$a = \frac{3 \cdot 10 \sin 30° - 2 \cdot 10 \sin 40° - 3 \cdot 10 \cos 30° \cdot 0{,}4 - 2 \cdot 10 \cos 40° \cdot 0{,}4}{3 + 2} = \frac{-14{,}4}{5}$$ $\Rightarrow$ Soustava se naznačeným směrem nerozjede $\Rightarrow$ zkusíme opačný směr.



Výsledná síla: $F = F_{g2r} - F_{g1r} - F_{t1} - F_{t2}$

Vzorce pro jednotlivé síly známe. Dosadíme do vzorce:

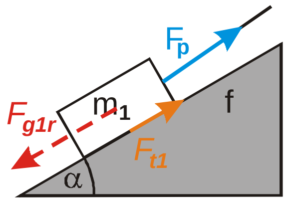
$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_{g2r} - F_{g1r} - F_{t1} - F_{t2}}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 g \sin\beta - m_1 g \sin\alpha - m_1 g \cos\alpha \cdot f - m_2 g \cos\beta \cdot f}{m_1 + m_2}.$$

Spočteme hodnotu zrychlení:

$$a = \frac{2\cdot 10 \sin 40° - 3\cdot 10 \sin 30° - 3\cdot 10 \cos 30° \cdot 0,4 - 2\cdot 10 \cos 40° \cdot 0,4}{3+2} = \frac{-18,7}{5}$$ $\Rightarrow$ Soustava se nerozjede ani druhým směrem $\Rightarrow$ bude stát na místě.

Výpočet síly *F*:

Nakreslíme si všechny síly působící ve směru pohybu na závaží m_1.



Závaží je v klidu $\Rightarrow$ výsledná síla je nulová: $F_{g1r} = F_p + F_{t1}$

$F_p = F_{g1r} - F_{t1} = m_1 g \sin\alpha - m_1 g \cos\alpha \cdot f =$

$= 3\cdot 10 \sin 30° - 3\cdot 10 \cdot \cos 30° \cdot 0,4\ \mathrm{N} = 4,6\ \mathrm{N}$

Soustava zůstane v klidu, na závaží m_1 působí provázek silou 4,6 N.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad velmi dobře prověřuje zda studenti chápou, co vlastně počítají. Ti, kteří se pořádně neorientují se většinou smíří se zápornou hodnotou zrychlení a postupují zcela stejně jako v předchozích příkladech.

Poznámka: Příklady, ve kterých není příliš jasné, na kterou stranu se soustava začne pohybovat (nebo zda se vůbec pohybovat bude) je samozřejmě jednodušší řešit tím, že si spočítáme velikosti jednotlivých sil a zhodnotíme, zda se soustava může dát do pohybu:

$F_{g1r} = m_1 g \sin\alpha = 3\cdot 10 \sin 30°\ \mathrm{N} = 15\ \mathrm{N}$

$F_{g2r} = m_2 g \sin\beta = 2\cdot 10 \cdot \sin 40°\ \mathrm{N} = 12,9\ \mathrm{N}$

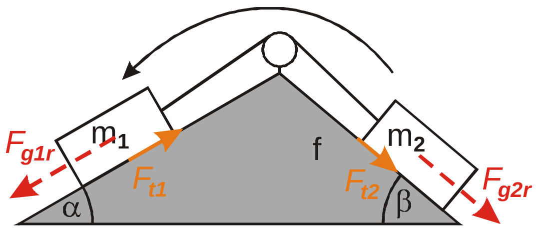
$F_{t1} = m_1 g \cos\alpha \cdot f = 3\cdot 10 \cdot \cos 30° \cdot 0,4\ \mathrm{N} = 10,4\ \mathrm{N}$

$F_{t2} = m_2 g \cos\beta \cdot f = 2\cdot 10 \cdot \cos 40° \cdot 0,4\ \mathrm{N} = 6,1\ \mathrm{N}$

na první pohled je zřejmé, rozdíl dvou rovnoběžných složek gravitačních sil, který uvádí soustavu do pohybu, nemůže překonat obě třecí síly a soustava tak zůstane stát. Ze spočtených hodnot, je také vidět, že síla, kterou působí provázek na závaží m_1 je $F_{g1r} - F_{t1} = 15 - 10,4\ \mathrm{N} = 4,6\ \mathrm{N}$.

Př. 4: Urči maximální hodnotu koeficientu tření, při které by se soustava z předchozího příkladu dala do pohybu.

Ze dvou rovnoběžných složek gravitačních sil, které mohou uvést soustavu do pohybu je větší síla F_{g1r} $\Rightarrow$ soustava by se musela pohybovat za ní.



Výsledná síla: $F = F_{g1r} - F_{g2r} - F_{t1} - F_{t2}$, soustava se nepohybuje pokud $F = 0$.

$$m_1 g \sin\alpha - m_2 g \sin\beta - m_1 g \cos\alpha \cdot f - m_2 g \cos\beta \cdot f = 0$$

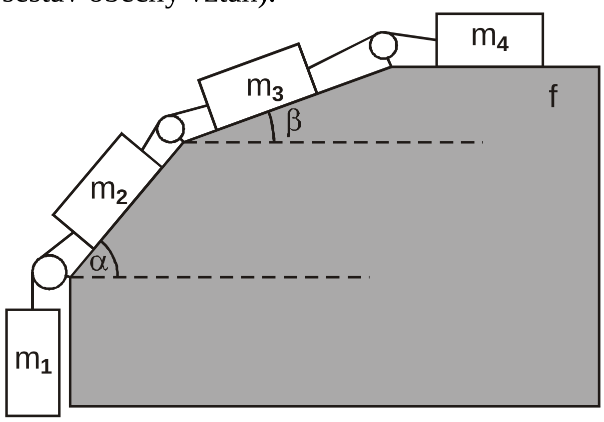
$$m_1 g \sin\alpha - m_2 g \sin\beta = f\left(m_1 g \cos\alpha + m_2 g \cos\beta\right)$$

$$f = \frac{m_1 g \sin\alpha - m_2 g \sin\beta}{m_1 g \cos\alpha + m_2 g \cos\beta}$$

Dosadíme: $f = \frac{m_1 g \sin\alpha - m_2 g \sin\beta}{m_1 g \cos\alpha + m_2 g \cos\beta} = \frac{3 \cdot 10 \cdot \sin 30° - 2 \cdot 10 \cdot \sin 40°}{3 \cdot 10 \cdot \cos 30° + 2 \cdot 10 \cdot \cos 40°} = 0{,}052$.

Soustava by se dala do pohybu pouze v případě, že by koeficient tření byl menší než 0,052.

Př. 5: Urči zrychlení soustavy na obrázku. (protože nejsou zadány konkrétní hodnoty, sestav obecný vztah).



Druhý Newtonův zákon: $a = \frac{F}{m}$

Postupujeme rovnou bez obrázku se silami:

Výsledná síla: $F = F_{g1} + F_{g2r} + F_{g3r} - F_{t2} - F_{t3} - F_{t4}$

Vztahy pro jednotlivé síly:

- $F_{g1} = m_1 g$
- $F_{g2r} = m_2 g \sin\alpha$
- $F_{g3r} = m_3 g \sin\beta$
- $F_{t2} = m_2 g \cos\alpha \cdot f$
- $F_{t3} = m_3 g \cos\beta \cdot f$
- $F_{t4} = m_4 g \cdot f$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{m_1 g + m_2 g \sin\alpha + m_3 g \sin\beta - m_2 g \cos\alpha \cdot f - m_3 g \cos\beta \cdot f - m_4 g \cdot f}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

Shrnutí: Při výpočtu zrychlení soustavy je výhodné nejdříve sestavujeme vztah pro síly a pak teprve hledáme jejich konkrétní vyjádření.